МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Марийский государственный университет»
Физико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе и
инновационной деятельности
Леухин / А.Н. Леухин
(подпись)
«27» апреля 2022 г.

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Научная специальность 1.1.6 Вычислительная математика

(Естественные науки)

Йошкар-Ола
2022

Настоящая программа составлена в соответствии с паспортом научной специальности
1.1.6 Вычислительная математика.

(код и наименование научной специальности)

Программа разработана: Зав. кафедрой математического анализа и теории функций Кокуриным Михаилом Юрьевичем, д.ф.-м.н., профессором

(должность, Ф.И.О., ученая степень, звание автора(ов) программы)

Рассмотрена и одобрена на заседании кафедры
математического анализа и теории функций

(название кафедры)

протокол заседания № 5 от «27» апреля 2022 г.

Кокурин М.Ю. зав. кафедрой

(подпись, Ф.И.О. зав. кафедрой)

Сведения о переутверждении программы кандидатского экзамена и регистрация изменений

Учебный год	Решение кафедры *(№ протокола, дата заседания кафедры, Ф.И.О., подпись зав. кафедрой)*	Автор изменения *(Ф.И.О., подпись)*	Номер изменения

1. Общие положения

Настоящая программа предназначена для лиц, сдающих кандидатский экзамен по специальной дисциплине Вычислительная математика научной специальности 1.1.6 Вычислительная математика.

В основу данной программы положены следующие разделы: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы.

Цель экзамена – установить глубину профессиональных знаний соискателя ученой степени, уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе.

Настоящая программа определяет порядок проведения кандидатского экзамена по специальной дисциплине и состоит из типовой программы, вопросов к кандидатскому экзамену и рекомендуемой литературы. Материал типовой программы формирует общую теоретическую базу и обязателен для изучения всеми соискателями ученой степени. Обязательным приложением к настоящей программе является дополнительная программа, разрабатываемая соответствующей кафедрой с учетом профиля диссертационного исследования соискателя. Материал дополнительной программы ориентирован на различные направления подготовки диссертационной работы и изучается в объеме, необходимом для поставленной научной задачи.

2. Процедура проведения экзамена

Кандидатский экзамен проводятся по усмотрению экзаменационной комиссии по билетам или без билетов. Для подготовки ответа экзаменующийся использует экзаменационные листы.

На каждого экзаменующегося заполняется протокол приема кандидатского экзамена, в который вносятся вопросы билетов и вопросы, заданные членами комиссии.

Уровень знаний оценивается на "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно".

Экзаменационные билеты должны включать два вопроса в соответствии с разделами типовой программы и один вопрос в соответствии с разделами дополнительной программы.

3. Типовая программа

1. Функциональный анализ

1. Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.
2. Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.
3. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
4. Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.
5. Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.
6. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха—Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов).
7. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.
8. Пространства функций C, L2, Lp, Wpl. Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре—Стеклова—Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

2. Задачи математической физики

1. Математические модели физических задач. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

3. Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).

4. Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля.

3. Численные методы

1. Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

2. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

3. Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

4. Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

6. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

7. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегроинтерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

8. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

9. Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

10. Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

4. Вопросы к кандидатскому экзамену по типовой программе

1. Метрические, нормированные, банаховы, гильбертовы пространства. Полнота. Пространства непрерывно дифференцируемых и суммируемых функций.
2. Компактные множества в метрических пространствах. Теорема Арцела.
3. Непрерывные отображения. Принцип сжимающих отображений и его применения.
4. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектр линейного оператора. Классификация точек спектра. Неограниченные линейные операторы, замкнутые операторы. Примеры.
5. Сопряженное пространство. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Сильная и слабая сходимость. Различные виды сходимости линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.
6. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.
7. Сопряженные, самосопряженные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.
8. Спектральное разложение самосопряженных операторов, функции от самосопряженных операторов.
9. Теоремы Фредгольма.
10. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона и его применения.
11. Обобщенные функции, обобщенная производная и пространства Соболева. Эквивалентные нормы пространств Соболева. Теоремы вложения.
12. Математические модели физики, приводящие к уравнениям с частными производными. Классификация линейных уравнений второго порядка. Основные типы уравнений. Задача Коши для уравнения высокого порядка, теорема Коши-Ковалевской.
13. Краевые задачи для эллиптических уравнений. Обобщенное решение. Гармонические функции и их основные свойства. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.
14. Задача Коши для уравнения теплопроводности в одномерном и многомерном случаях. Фундаментальное решение.
15. Задача Коши для уравнения колебаний в одномерном и многомерном случаях. Формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа. Фундаментальные решения. Принцип Гюйгенса.
16. Смешанные задачи для уравнений параболического и гиперболического типов. Метод разделения переменных. Существование, единственность и устойчивость решения. Задача Штурма-Лиувилля.
17. Прямые методы решения общих квадратных систем линейных уравнений. Метод Гаусса и его варианты, LU- разложение, разложение Холесского.
18. Задача наименьших квадратов. QR-разложение, сингулярное разложение матрицы. Векторные и матричные нормы. Число обусловленности матрицы.
19. Одношаговые итерационные методы решения систем линейных уравнений. Чебышевские итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров.
20. Итерационные методы вариационного типа. Метод сопряженных градиентов. Численные методы безусловной нелинейной оптимизации.
21. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева, их свойства и приложения.
22. Интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа. Оценка погрешности интерполирования. Выбор узлов интерполяции.
23. Интерполяция сплайнами. Оценка погрешности.
24. Интерполяционные квадратурные формулы. Оценка погрешности.
25. Квадратурные формулы типа Гаусса. Оценка погрешности.
26. Методы Рунге-Кутта решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость.
27. Многошаговые методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость.
28. Численные методы решения краевых задач для уравнений второго порядка. Методы прогонки и стрельбы.

29. Общая схема исследования приближенных методов. Аппроксимация, устойчивость, сходимость.
30. Разностные схемы для эллиптических уравнений. Устойчивость. Оценка порядка аппроксимации и сходимости.
31. Разностные схемы для параболических уравнений. Явные и неявные схемы. Устойчивость. Оценка порядка аппроксимации и сходимости.
32. Разностные схемы для гиперболических уравнений. Устойчивость. Оценка порядка аппроксимации и сходимости.
33. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач.
34. Общие свойства проекционных методов. Метод моментов, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод наименьших квадратов. Оценка погрешности, сходимость.
35. Вариационная формулировка краевой задачи. Метод Ритца.
36. Понятие о корректных и некорректных задачах, регуляризующий алгоритм. Метод Тихонова, применение к линейным интегральным уравнениям первого рода.

5. Рекомендуемая литература

5.1. Литература, рекомендуемая экспертным советом Высшей аттестационной комиссии по математике и механике

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
6. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
8. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
9. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1999.
13. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
14. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука, 2008.

5.2. Дополнительная литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – СПб.: Лань, 2009.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2004.
5. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ, 2005.
6. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Т.1. – М.: МЦМНО, 2011.
8. Уоткинс Д. Основы матричных вычислений.-М.: БИНОМ, 2006.