

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Марийский государственный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по инновационной
деятельности

/ К.Н. Белослудцев

(подпись)

«19» января 2026 г.

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ПРИЁМЕ
НА ОБУЧЕНИЕ ПО ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРОГРАММАМ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ - ПРОГРАММАМ ПОДГОТОВКИ
НАУЧНЫХ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ
В АСПИРАНТУРЕ**

Научная специальность 1.1.6. Вычислительная математика

Специальная дисциплина Вычислительная математика

Йошкар-Ола

2026

Настоящая программа составлена в соответствии с Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, условиями их реализации, сроком освоения этих программ, образовательных технологий, Порядком приема на обучение по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре и паспорта научной специальности 1.1.6 – Вычислительная математика.

Программа разработана: заведующим кафедрой математического анализа и теории функций, доктором физ.-мат. наук, профессором Кокуриным М. Ю.

(должность, Ф.И.О., ученая степень, звание автора(ов) программы)

Рассмотрена и одобрена на заседании кафедры
математического анализа и теории функций

(название кафедры)

протокол заседания № 3 от «16» января 2026 г.

/ М.Ю. Кокурин

(подпись, Ф.И.О. зав. кафедрой)

Содержание программы

Вычислительная математика

1. **Метрические пространства.** Метрические пространства. Предел в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности и полнота. Примеры полных и неполных метрических пространств. Пространства последовательностей, пространства непрерывных и гладких функций.
2. **Принцип сжимающих отображений.** Принцип сжимающих отображений и его применения и его применение к уравнениям с одной неизвестной и к интегральным уравнениям второго рода.
3. **Компактные множества в метрических пространствах.** Компактные множества в метрических пространствах. Теорема Арцела. Полунепрерывные функции на метрическом пространстве. Теоремы Вейерштрасса об экстремумах полунепрерывных функций на компактных множествах.
4. **Гильбертовы и банаховы пространства.** Гильбертовы и банаховы пространства. Пространства последовательностей, пространства непрерывных и гладких функций. Линейные непрерывные функционалы. Сопряженное пространство. Слабая сходимость. Примеры.
5. **Линейные непрерывные, непрерывные операторы.** Линейные непрерывные и вполне непрерывные операторы в гильбертовом и банаховом пространстве. Непрерывность и ограниченность. Норма оператора.
6. **Обратный оператор и его свойства.** Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе. Непрерывная обратимость операторов и корректность операторных уравнений.
7. **Линейные вполне непрерывные операторы.** Линейные вполне непрерывные операторы. Полная непрерывность интегральных операторов в пространствах квадратично суммируемых и непрерывных функций. Структура образа вполне непрерывного оператора.
8. **Спектр линейного оператора.** Спектр линейного оператора. Замкнутость спектра. Виды точек спектра. Спектральные свойства вполне непрерывных операторов.
9. **Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве.** Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства операции сопряжения. Самосопряженные операторы и их спектральные свойства. Сопряженность и самосопряженность интегральных операторов в пространствах квадратично суммируемых функций.
10. **Теоремы Фредгольма.** Абстрактные линейные операторные уравнения второго рода. Теоремы Фредгольма. Приложения к интегральным уравнениям.
11. **Операторные уравнения первого рода.** Линейные операторные уравнения первого рода. Общее понятие некорректной задачи.
12. **Производная функций одной и нескольких переменных.** Производная функций одной и нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент и его геометрический смысл.

13. **Интеграл Римана.** Интеграл Римана и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Критерий Дарбу существования интеграла Римана. Кратные интегралы Римана и методы их вычисления.
14. **Криволинейные и поверхностные интегралы.** Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина и Остроградского.
15. **Мера Лебега и общая конструкция меры.** Мера Лебега на прямой и на плоскости. Основные свойства меры Лебега. Общая конструкция меры. Мера Лебега-Стилтьеса.
16. **Интеграл Лебега.** Интеграл Лебега от простой и от измеримой функции. Простейшие свойства интеграла Лебега. Гильбертовы и банаховы пространства суммируемых функций.
17. **Интеграл Лебега-Стилтьеса.** Интеграл Лебега-Стилтьеса и его основные свойства.
18. **Предельный переход в интегралах Римана и Лебега.** Теоремы о предельном переходе в интегралах Римана и Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
19. **Теорема Фубини.** Произведение мер. Кратные интегралы Лебега. Теорема Фубини.
20. **Аналитические функции и их свойства.** Аналитические функции. Условие Коши-Римана. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши. Формула Коши.
21. **Числовые ряды и их свойства.** Свойства числовых рядов. Абсолютная и условная сходимость. Критерии сходимости. Ряды комплексных чисел.
22. **Равномерная сходимость функциональных рядов.** Равномерная сходимость рядов функций вещественной и комплексной переменной. Почленное дифференцирование и интегрирование вещественных и комплексных функциональных рядов.
23. **Степенные ряды и их свойства.** Степенной ряд и радиус его сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда внутри круга сходимости. Теорема единственности ряда Тейлора. Особые точки функции на границе круга сходимости ее степенного ряда.
24. **Ряды Лорана и их свойства.** Ряд Лорана и область его сходимости. Единственность разложения функции в ряд Лорана.
25. **Тригонометрические ряды Фурье и их свойства.** Тригонометрические ряды Фурье и различные виды их сходимости. Признаки равномерной сходимости. Полнота тригонометрической системы.
26. **Ортогональные многочлены.** Ортогональные многочлены и их свойства. Полиномы Чебышева и Лежандра.
27. **Абстрактные ряды Фурье.** Абстрактные ряды Фурье. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость. Теорема Рисса-Фишера. Критерий полноты ортонормированной системы элементов гильбертова пространства.
28. **Интерполяционные многочлены.** Методы построения интерполяционных многочленов. Оптимизация распределения узлов интерполирования. Сплайн-интерполяция.
29. **Интерполяционные квадратурные формулы.** Интерполяционные квадратурные формулы и оценка их погрешности. Квадратурные формулы Гаусса.

30. **Итерационные методы решения систем линейных уравнений.** Итерационные методы решения систем линейных уравнений (метод простой итерации, метод Зейделя, метод наискорейшего спуска) и анализ их сходимости.
31. **Методы Рунге-Кутты.** Методы Рунге-Кутты решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Оценка погрешности.
32. **Метод сеток для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.** Метод сеток решения линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.
33. **Разностные схемы для решения основных типов уравнений в частных производных.** Разностные схемы для решения эллиптических, параболических, гиперболических уравнений в частных производных. Методы решения сеточных уравнений.
34. **Основы теории разностных схем.** Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных схем. Устойчивость явной и неявной схем для параболических уравнений.
35. **Сеточный принцип максимума.** Сеточный принцип максимума. Устойчивость простейшей разностной схемы для уравнения Пуассона.

Критерии оценки

Вступительный экзамен проводится по билетам в соответствии с заявленной программой. Содержание экзамена в аспирантуру охватывает все минимальное содержание, установленное Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, условиями их реализации, сроком освоения этих программ, образовательных технологий. Экзамен проводится по экзаменационным билетам, включающим 2 вопроса из программы вступительных испытаний и 1 – собеседование по научным публикациям поступающего (по реферату при отсутствии публикаций).

Для определения качества ответа на вступительных экзаменах при поступлении в аспирантуру учитываются следующие критерии: соответствие теме; полнота раскрытия вопроса, подкрепление теоретических положений примерами; правильность фактического материала; научный уровень; логическая последовательность изложения материала; знание терминологии; степень осознанности понимания изученного; правильное речевое оформление (научный стиль изложения, соответствие нормам современного литературного языка).

Вступительные испытания по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров оцениваются:

80–100 баллов – отлично,

60–79 баллов – хорошо,

40–59 баллов – удовлетворительно;

Ниже 40 баллов – неудовлетворительно

Отлично	Ответ полный и развёрнутый. Просматривается понимание существа проблемы и путей её решения. Продемонстрированы умения выделять существенные признаки понятий и причинно-следственные связи явлений; умения включаться в дискуссию, аргументировать свою позицию, выражать отношение к тем или иным точкам зрения. Ответ структурирован, логичен, терминологически обоснован, умеет тесно увязывать теорию с практикой. Речь коммуникативно целесообразная.
Хорошо	Ответ в целом полный и аргументированный. Прослеживается умение выделять главное и существенное, анализировать разные точки зрения на проблему, при этом не всегда чётко аргументирована собственная позиция. Ответ выстроен логически верно, выявлены существенные признаки понятий, явлений, дана их чёткая интерпретация, сделаны обоснованные выводы. Речь коммуникативно целесообразная.
Удовлетворительно	Ответ в целом раскрывает содержание вопроса, но допущены существенные отклонения от темы. Прослеживается понимание заявленной проблемы, но при этом обнаруживается недостаточная последовательность и логичность суждений. Допущены неточности в раскрытии понятий, теорий, явлений. Прослеживается попытка анализировать информацию с разных точек зрения, но не делаются обоснованные выводы.
Неудовлетворительно	Ответ не полный, не аргументирован. Представлены разрозненные знания по существу вопроса. Допущены ошибки в определении понятий и их интерпретации. Обнаруживается фрагментарность изложения материала, нарушение логики представления понятий, явлений, теорий. Ответ требует

	уточнения и коррекции. Не получены ответы по основополагающим вопросам дисциплины. Речь отличается коммуникативно нецелесообразными проявлениями.
--	---

Оценка ответов на вступительном экзамене проводится экзаменационной комиссией, действующей на основании приказа,

Минимальное количество баллов не может быть изменено в ходе приема.

Максимальное количество баллов за вступительный экзамен – 100 баллов, минимальное количество – 40 баллов.

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. Садовничий В.А. Теория операторов. 5-е изд. Дрофа, 2004
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 2004.
4. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Учебник. 15-е изд., СПб.: Издательство «Лань», 2009.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Физматлит, 2004.
6. Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс. РХД, 2009.
7. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. МЦНМО, 2004.
8. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н. и др. Действительный анализ в задачах. ФИЗМАТЛИТ, 2005.
9. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Издательство УРСС, 2004
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009.
12. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. Ижевск: РХД, 2009.
13. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н. и др. Действительный анализ в задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Дополнительная литература

1. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. 4-е изд., испр. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001.
2. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. 3-е издание, испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука. 1974.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. I-III. М.: Наука, 2001
6. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1968.
7. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т.1.,2. "Высш.ш. школа", 1972.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003.

9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

Журналы, рекомендованные ВАК:

1. Журнал вычислительной математики и математической физики. М.: ФГУП «Академиздатцентр «Наука», 2009-2015 гг.
2. Известия вузов. Математика. Казань: Изд-во КФУ, 2009-2015 гг.
3. Успехи математических наук. М.: ФГУП «Академиздатцентр «Наука», 2009-2015 гг.
4. Математический сборник. М.: ФГУП «Академиздатцентр «Наука», 2009-2015 гг.
5. Математические заметки. М.: ФГУП «Академиздатцентр «Наука», 2009-2015 гг.
6. Сибирский журнал вычислительной математики. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения РАН, 2009-2015 гг.